
VITTORIO EM. III


FONDO PIZZOFALCONE


NAZIONALE
BIBLIOTECA
B. Prov.
Miscellanea
B
50
317
VITTORIO EM. III
NAPOLI

THÉORIE NOUVELLE

DE

LA ROTATION

DES CORPS.





IMPRIMERIE DE BACHELIER.

THÉORIE NOUVELLE

DE

LA ROTATION

DES CORPS,

Extrait d'un Mémoire lu à l'Académie des Sciences de l'Institut, le 19 mai 1834,

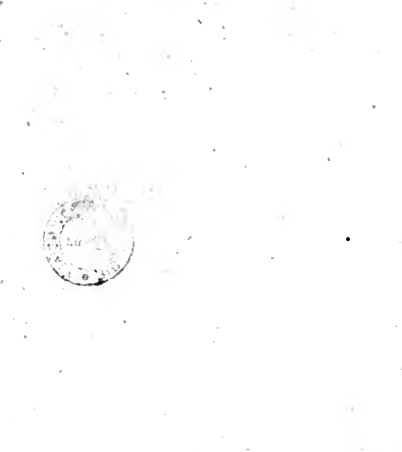
PAR M. POINSOT.



PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1834





THÉORIE NOUVELLE

DE

LA ROTATION

DES CORPS.

Voici une des questions qui m'ont le plus souvent occupé, et, si l'on me permet de parler ainsi, une des choses que j'ai le plus désiré de savoir en Dynamique.

Tout le monde se fait une idée claire du mouvement d'un *point*, c'est-à-dire, du mouvement d'un corpuscule qu'on suppose infiniment petit, et qu'on réduit en quelque sorte par la pensée à un point mathématique. Car il ne reste plus alors qu'à se représenter la ligne, droite ou courbe, que ce point peut décrire, et la vitesse avec laquelle il se meut suivant cette ligne. Mais s'il s'agit du mouvement d'un corps *de grandeur sensible et de figure quelconque*, il faut convenir qu'on ne s'en fait qu'une idée très obscure.

A la vérité, cette idée paraît d'abord s'éclair-

cir, ou se résoudre naturellement en deux autres. En effet, si l'on s'attache à regarder un seul et même point du corps, on peut suivre d'un côté, le mouvement de ce point qui ne peut décrire qu'une certaine ligne dans l'espace; et de l'autre côté, le mouvement du corps qui ne peut que tourner en même temps sur ce point, comme autour d'un centre fixe. Mais ce second mouvement, c'est-à-dire, celui d'un corps mobile autour d'un point, sur lequel il a la liberté de pirouetter dans tous les sens, ne présente lui-même qu'une idée très obscure.

Ce n'est pas qu'en rapportant les points du corps à des plans, ou objets fixes dans l'espace, on n'ait su trouver ce qu'on appelle les *équations différentielles* de ce mouvement, et même qu'on ne soit venu à bout d'*intégrer* ces équations, ou du moins d'en ramener les intégrales aux *quadratures*, dans le cas simple d'un corps libre de toute action étrangère. *Euler* et *d'Alembert*, à peu près dans le même temps, et par des méthodes différentes, ont les premiers résolu cette importante et difficile question de la Mécanique : et l'on sait que depuis, l'illustre *Lagrange* a repris de nouveau ce fameux problème, pour l'approfondir et le développer à sa manière, je veux dire, par une suite de formules et de transformations analytiques qui présentent beaucoup d'ordre et de symétrie.

Mais il faut convenir que, dans toutes ces solutions, on ne voit guère que des calculs, sans aucune image nette de la rotation du corps. On peut bien, par ces calculs, plus ou moins longs et compliqués, parvenir à déterminer le lieu où se trouvera le corps au bout d'un temps donné : mais on ne voit point du tout comment le corps y arrive; on le perd entièrement de vue; tandis qu'on voudrait l'observer, et le suivre, pour ainsi dire, des yeux dans tout le cours de sa rotation.

Or, c'est cette idée claire du mouvement de rotation que j'ai tâché de découvrir, afin de mettre sous les yeux ce que personne ne s'était encore représenté.

Il en résulte une solution toute nouvelle du problème de la rotation d'un corps abandonné à lui-même, soit qu'il tourne librement sur son centre de gravité, ou sur tout autre point fixe autour duquel il serait forcé de se mouvoir : véritable solution du problème, en ce qu'elle fait image, et qu'on y voit le mouvement du corps avec autant de clarté que le mouvement d'un point. Et si, de cette démonstration géométrique de la rotation des corps, on veut passer au calcul, pour mesurer toutes les différentes propriétés ou affections de ce mouvement, on n'a plus que des formules directes et toujours claires, parce que chacune d'elles n'y est

que l'expression d'un théorème dynamique dont on a l'idée, et qui tend à son objet. Ainsi, notre analyse présente encore cet avantage, que tout s'y exprime et s'y développe par les seules données immédiates du problème, sans aucun mélange de ces angles ou de ces coordonnées étrangères qui ne tiennent point à la nature de la question, et qui ne viennent que de la méthode indirecte qu'on emploie pour la résoudre. Car c'est une remarque que nous pouvons faire dans toutes nos recherches mathématiques : ces quantités auxiliaires, ces calculs longs et difficiles où l'on se trouve entraîné, y sont presque toujours la preuve que notre esprit n'a point, dès le commencement, considéré les choses en elles-mêmes et d'une vue assez directe, puisqu'il nous faut tant d'artifices et de détours pour y arriver; tandis que tout s'abrége et se simplifie sitôt qu'on se place au vrai point de vue.

J'ai donc pensé qu'une solution si simple, et si propre à jeter un nouveau jour sur les questions les plus difficiles de la Dynamique, pouvait servir à l'avancement réel de la science, et méritait ainsi l'attention des géomètres; et c'est cette considération philosophique qui m'a surtout déterminé à composer le nouveau Mémoire que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie.

Je le divise en trois parties principales. Dans la première, je considère le mouvement du corps en lui-même, et les forces qui seraient capables de le produire. Dans la seconde, je donne la solution du problème de la rotation des corps libres ; et dans la troisième, je développe les calculs qui se rapportent à cette solution.

Mais, pour donner une idée plus précise de ce travail, je vais exposer, en peu de mots, les notions simples et les premiers principes de notre théorie nouvelle, et parcourir ensuite les théorèmes les plus remarquables qui en sont l'objet et le résultat.

I.

DU MOUVEMENT DES CORPS CONSIDÉRÉ EN LUI-MÊME ; ET DES FORCES CAPABLES D'UN MOUVEMENT DONNÉ.

Idée de la rotation simple et de la vitesse angulaire.

Le seul mouvement de rotation dont nous ayons une idée claire est celui d'un corps qui tourne sur un axe immobile. Car on voit clairement toutes les circonférences de cercles que les points du corps décrivent autour de cet axe, et qu'ils peuvent réellement décrire ensemble, c'est-à-dire, sans que leur disposition mutuelle, ou ce qu'on peut nommer la *figure* du corps, en soit en rien changée.

Nous avons également une idée nette de la quantité ou de la mesure de cette rotation : car, comme tous les points décrivent en même temps des arcs semblables, le rapport de la vitesse d'un point, au rayon du cercle qu'il décrit, est le même pour tous les points du corps ; et c'est ce rapport constant qui fait la mesure, ou ce qu'on appelle la *vitesse angulaire* de la rotation.

Composition des mouvemens de rotation.

De ces notions simples, et des premiers élémens de la Géométrie, on peut conclure que si, par deux causes quelconques, un corps tendait à tourner à la fois autour des deux côtés d'un parallélogramme avec deux vitesses angulaires proportionnelles aux longueurs de ces côtés, le corps tournerait sur la diagonale avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur de cette diagonale.

D'où il résulte que des rotations autour de différens axes qui passent en un même point se composent exactement par la même loi que de simples forces appliquées en ce point.

Et cette similitude de composition n'est pas bornée à des rotations dont les axes se croisent en un même point; mais ce qui est fort remarquable, elle s'étend à des rotations autour d'axes qui seraient situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Ainsi, deux rotations autour de deux axes parallèles se composent en une seule, égale à leur somme, autour d'un axe parallèle, et qui divise la distance des deux premiers en raison inverse des deux rotations composantes. Si ces deux rotations sont de sens contraires, la rotation résultante est égale à leur différence, et la

position de son axe se trouve comme s'il s'agissait de deux forces parallèles qui agissent en sens contraires.

Si ces deux rotations parallèles et contraires sont égales, elles ne peuvent jamais se réduire à une seule. Elles forment alors ce qu'on peut nommer un *couple de rotations* : c'est pour ainsi dire une rotation *suî generis*, et qui ne peut jamais être ramenée à une rotation simple autour d'aucun axe quel qu'il soit. Et en effet, il est très aisé de voir que le résultat d'un tel couple serait de donner au corps un pur mouvement de *translation* dans l'espace, suivant une direction perpendiculaire au plan de ce couple, et mesuré par son *moment*, c'est-à-dire, par le produit d'une des deux rotations multipliées par la distance qui sépare leurs axes parallèles. Un *couple de rotations* équivaut donc à une simple force qu'on appliquerait au centre de gravité du corps, suivant une direction perpendiculaire au plan de ce couple, et qu'on prendrait égale à son moment multiplié par la masse du corps.

De tels couples peuvent se transformer en d'autres équivalens, se tourner et se transporter comme on voudra dans leurs plans, ou dans d'autres plans parallèles, sans que le mouvement du corps en soit changé : ils se *composent* et se *décomposent* exactement par la même loi que les couples ordinaires ; et on peut leur appliquer,

sans en rien excepter, tous les théorèmes qui leur correspondent.

Du parallélogramme des *rotations simples* et du parallélogramme des *couples de rotations*, résulte la composition de *tant de rotations* qu'on voudra autour d'axes situés d'une manière quelconque dans l'espace ; et cette composition générale est entièrement semblable à celle des forces.

Ainsi, comme tant de forces qu'on voudra se peuvent toujours réduire à une seule passant par un point quelconque donné, et à un seul couple ; de même tant de rotations qu'on voudra, autour de différens axes situés d'une manière quelconque dans l'espace, peuvent toujours se réduire à une seule rotation autour d'un axe passant par un point pris à volonté, et à un seul couple de deux rotations égales et contraires autour de deux axes parallèles entre eux. Et si, comme pour les forces, on veut une réduction où il n'y ait rien d'arbitraire, on pourra toujours choisir le point dont il s'agit, de manière que le plan du couple de rotations soit perpendiculaire à l'axe de la rotation résultante, lequel devient ainsi ce qu'on pourrait nommer l'*axe central* des couples de rotations.

Comme un couple de rotations équivaut à une pure translation du corps suivant la direc-

tion de l'axe de ce couple, on voit que tout le mouvement du corps se réduit en dernière analyse à tourner sur un certain axe déterminé, et à couler en même temps le long de cet axe. Ce qui est, comme nous le verrons plus loin, le mouvement le plus général que puisse avoir un corps dans l'espace absolu.

Voilà en peu de mots, tout ce qui regarde l'idée de la rotation simple sur un axe, et la composition de semblables rotations autour de différens axes situés d'une manière quelconque dans l'espace. Mais il faut se faire maintenant une idée de la rotation d'un corps autour d'un point sur lequel il semble pirouetter en tous sens.

Idée de la rotation autour d'un point.

Le mouvement d'un corps qui tourne sur un axe immobile étant le seul dont nous ayons une idée claire, c'est donc à cette idée qu'il faut tâcher de réduire celle du mouvement d'un corps qui pirouette d'une manière quelconque autour d'un point fixe.

Or on fait voir que ce mouvement, quel qu'il soit, si on ne le regarde que durant un instant, n'est autre chose qu'une rotation simple autour d'un certain axe passant par le point fixe, et dont la direction reste immobile pen-

dant cet instant. D'où l'on conclut que, dans l'instant suivant, c'est de même une rotation simple, mais autour d'un autre axe; et ainsi de suite d'un instant à l'autre : de sorte que le mouvement du corps peut être considéré comme une suite de ces rotations simples et dont chacune ne présente à l'esprit qu'une idée nette. C'est ainsi que pour se faire l'idée du mouvement d'un point en ligne courbe, on se représente ce point comme décrivant les côtés successifs d'un polygone infinitésimal inscrit à à cette courbe. Et il en est de l'*axe instantané* de rotation dans le mouvement des corps, comme de la *tangente* à la courbe dans le mouvement du point qui la décrit.

Image sensible de cette rotation.

Quoique l'analyse précédente soit exacte, et que je me sois efforcé de la rendre claire, il me semble que l'idée d'un corps tournant sur un axe qui varie sans cesse, est encore un peu obscure; je veux dire qu'on ne voit pas bien ce qui arrive au corps, et qu'on a de la peine à le suivre dans cette espèce de rotation changeante. Il faut donc tâcher d'éclaircir encore cette idée, et de présenter à l'esprit quelque image plus nette et plus sensible.

Or, je fais voir de la manière la plus simple, que *la rotation d'un corps sur un axe qui*

varie sans cesse de position autour d'un même point fixe, n'est autre chose que le mouvement d'un certain cône, dont le sommet est en ce point, et qui ROULE *actuellement, sans* GLISSER, *sur la surface d'un autre cône fixe de même sommet.*

Je veux dire que le cône mobile, considéré comme attaché au corps et l'entraînant avec soi, s'il vient à rouler sur l'autre cône qui est fixe dans l'espace absolu, fera décrire à ce corps le mouvement précis dont on le suppose animé. Que la ligne de contact de ces deux cônes sera à chaque instant l'axe autour duquel le corps tourne dans cet instant, ou ce que l'on appelle l'*axe instantané;* d'où l'on voit comment cet axe est à la fois mobile dans le corps et dans l'espace absolu, décrivant dans l'espace la surface du cône fixe, et dans l'intérieur du corps, la surface du cône mobile dont on vient de parler.

Tel est, je crois, le plus haut point de clarté où l'on puisse porter l'idée si complexe et si obscure du mouvement d'un corps qui tourne d'une manière quelconque autour d'un centre fixe. Il n'y a point de mouvement de cette nature qu'on ne puisse exactement produire en faisant rouler un certain cône sur un autre cône fixe de même sommet; de sorte que si l'on imagine tous les cônes possibles qu'on ferait ainsi rouler l'un sur l'autre, on a l'image fidèle de tous les

mouvemens possibles dont un corps soit capable autour d'un point sur lequel il a la liberté de pirouetter en tous sens.

Et même, s'il s'agissait d'un mouvement de rotation qui fût discontinu, c'est-à-dire, où l'axe de rotation, au lieu de varier de position par degrés insensibles, sauterait brusquement d'une position à la suivante par un angle fini, on pourrait également imiter le mouvement du corps en prenant, au lieu de deux cônes, deux pyramides de même sommet, et de faces respectivement égales, et faisant rouler l'une sur l'autre, de manière que la pyramide mobile, tournant sur la commune arète, vînt appliquer, l'une après l'autre, toutes ses différentes faces sur les faces respectivement égales de la pyramide fixe.

Si le mouvement du corps est donné, il est clair que ces deux cônes, ou pyramides, sont aussi donnés, aussi bien que la vitesse angulaire de rotation sur la ligne de contact, et par conséquent, la vitesse avec laquelle l'axe instantané trace à la fois les deux surfaces. Et réciproquement, si de ces différentes choses qu'on peut considérer dans l'étude de ce mouvement, trois quelconques sont connues, on peut dire que la quatrième l'est aussi, et le mouvement du corps entièrement déterminé.

Ainsi, la Terre tourne en un jour sur son

axe, tandis que cet axe décrit, en sens contraire, un cône droit autour de l'axe de l'écliptique, et avec une vitesse mesurée par le mouvement rétrograde des équinoxes, et qui est d'environ *quarante-deux tierces centésimales* par jour; on peut donc déterminer dans la Terre le cône qui roulant sur le premier, et dans l'intérieur de sa surface, ferait décrire à la Terre le mouvement précis qu'on y observe. Et il est facile de voir que, sur le globe, la circonférence du cercle qui sert de base à ce petit cône mobile, est à celle du cercle qui sert de base au cône fixe, comme un jour est au temps de la révolution complète des équinoxes : ce qui ne donne que quelques pieds de longueur (1) à la petite circonférence que le pôle instantané de rotation de la Terre décrit chaque jour à sa surface. (Tout ceci dans l'hypothèse d'une précession diurne uniforme.).

Idée du mouvement le plus général que puisse avoir un corps dans l'espace absolu.

De l'idée simple d'un pur mouvement de translation qui emporte à chaque instant toutes les molécules égales du corps par de petites lignes égales et parallèles dans l'espace, et de l'idée simple de la rotation du corps autour

(1) 5 pieds 2 pouces environ.

d'un axe qui reste immobile pendant cet instant, résulte l'idée complexe du mouvement le plus général que puisse avoir un corps dans l'espace absolu. Il n'y a rien de plus clair que cette résolution d'un mouvement quelconque en deux autres que l'on conçoit parfaitement, et qu'on peut même considérer à part, parce qu'ils sont tels que si, à chaque instant, on les exécutait l'un après l'autre, on amènerait chaque point du corps au même lieu où il arrive par son mouvement naturel au bout de l'instant que l'on considère.

Mais on pourrait être curieux de se faire une image de ce mouvement réel et unique qui anime le corps, afin de voir en quelque sorte la nature des courbes simultanées que les différens points décrivent, et peuvent réellement décrire ensemble sans que la figure du corps en soit changée.

Or, puisqu'un mouvement de translation peut toujours être considéré comme un couple de rotations égales parallèles et contraires, il s'ensuit que le mouvement d'un corps, quel qu'il soit, peut toujours être réduit à une simple rotation autour d'un axe passant par un point pris à volonté dans l'espace, et à un certain couple de rotations dont le plan sera généralement incliné à cet axe. Mais au lieu de prendre le point à volonté, on peut toujours le

choisir de manière que le plan du couple soit perpendiculaire à la direction de l'axe de la rotation simple; et alors tout le mouvement est réduit à une rotation sur un certain axe déterminé et à une translation le long de cet axe. D'où il résulte que ce mouvement est exactement le même que celui d'une *vis* qui tourne dans son *écrou*. Tous les points du corps décrivent donc, sur des cylindres concentriques, de petits arcs d'*hélices* qui ont toutes le même *pas*. Dans l'instant suivant, c'est une autre vis, d'un autre axe et d'un pas différent; et ainsi de suite : d'où l'on voit comment se forment les courbes simultanées que tous ces points décrivent dans l'espace, et le long desquelles ils se meuvent comme dans autant de canaux curvilignes où ils seraient enfermés.

Quelquefois le pas de cette vis est nul, et alors tout le mouvement se réduit à une simple rotation autour de l'axe de cette vis, lequel devient ce qu'on appelle un *axe spontané* de rotation.

Mais, en général, le pas de la vis n'est pas nul, et il n'y a point d'axe spontané proprement dit : c'est-à-dire que dans le corps il n'y a pas de ligne droite dont tous les points demeurent immobiles pendant un instant. Mais il y a toujours ce qu'on pourrait nommer un *axe spontané glissant;* c'est-à-dire, une suite

de points, tombant en ligne droite, qui n'ont d'autre mouvement qu'une simple translation le long de cette droite.

Telles sont les notions les plus simples et les images les plus claires qu'on puisse se former du mouvement des corps. Le pur mouvement de translation, et le pur mouvement de rotation sur un axe, se conçoivent d'eux-mêmes. Un mouvement quelconque se peut toujours réduire, et cela d'une infinité de manières, à deux pareils mouvemens. Or, parmi cette infinité de réductions, il y en a toujours une qui nous présente l'axe de la rotation dans la direction même de la translation : de sorte *que le mouvement le plus général d'un corps est, comme on l'a dit, celui d'une certaine vis qui tourne actuellement dans son écrou.*

Après avoir considéré le mouvement des corps en lui-même, et sous un point de vue purement géométrique, je vais chercher les forces capables de le produire, afin de voir réciproquement quel est le mouvement que doit prendre un corps en vertu de forces quelconques données; ce qui est le problème naturel de la Dynamique.

Des forces capables d'un mouvement donné.

Quel que soit le mouvement d'un corps, il existe toujours des forces capables de le produire.

Car, dans le mouvement du corps, on peut considérer chaque molécule comme si elle était en repos, mais animée par une force capable de lui donner la vitesse actuelle qu'on lui suppose. Donc l'infinité des forces semblables, appliquées individuellement à toutes les molécules égales du corps, sont capables d'y produire le mouvement qu'on y observe ; et cela même d'une manière spontanée, je veux dire quand bien même ces molécules ne seraient pas liées entre elles, et par conséquent sans exciter, dans les liens qui les unissent, aucune traction brusque qui tendît à les rompre.

Telles sont les forces élémentaires capables d'un mouvement donné sur un système de molécules libres, ou liées entre elles comme on voudra.

Mais si ces molécules forment, comme je le suppose ici, un système invariable de figure, il est permis de composer entre elles toutes ces forces élémentaires, et de les remplacer ainsi par une seule force et un seul couple, lesquels seront également capables du mouvement donné sur le corps *solide* dont il s'agit.

Voyons donc quelle est cette force et quel est ce couple dont l'ensemble répond à un mouvement donné.

Et d'abord, si le corps n'a dans l'espace qu'un pur *mouvement de translation*, de manière que

toutes les molécules égales aient des vitesses égales, parallèles et de même sens, il est manifeste que toutes les forces élémentaires capables de produire ces vitesses, sont aussi égales, parallèles et de même sens, et par conséquent réductibles à une seule force parallèle et de même sens, égale à leur somme, et qui passe par le centre de gravité du corps. D'où l'on voit, réciproquement, que *l'effet d'une force quelconque appliquée comme on voudra au centre de gravité d'un corps, est d'en transporter toutes les parties dans sa propre direction, et avec une vitesse mesurée par la grandeur de cette force divisée par la masse entière du corps.* Ce qui est, pour ainsi dire, évident de soi-même.

En second lieu, si le corps n'a qu'un *pur mouvement de rotation* sur un axe quelconque, il est évident que les vitesses et par conséquent les forces dont les molécules sont individuellement animées, sont toutes proportionnelles aux distances des molécules à cet axe, et de directions tout-à-la-fois perpendiculaires à ces distances et à l'axe dont il s'agit. Or ces forces élémentaires sont toujours réductibles à une seule et à un couple. Mais si l'axe passe par le centre de gravité du corps, la force est nulle, et tout se réduit à un couple, dont le plan est en général incliné à cet axe. Si de plus l'axe

est un de ces trois axes rectangulaires qui existent dans tous les corps, et qu'on appelle les trois *axes principaux*, on trouve que le couple est perpendiculaire à cet axe, et qu'il a pour mesure le produit de la vitesse angulaire par le *moment d'inertie* du corps autour de cet axe principal. D'où l'on conclut réciproquement, que *l'effet d'un couple appliqué sur un corps dans un plan perpendiculaire à l'un de ses trois axes principaux, est de faire tourner le corps sur cet axe lui-même, avec une vitesse angulaire égale au moment du couple divisé par le moment d'inertie du corps autour de cet axe.* Or, ce seul théorème particulier donne sur-le-champ l'effet d'un couple appliqué sur un corps dans tel plan qu'on voudra.

Et en effet quel que soit ce couple, on peut toujours le décomposer en trois autres respectivement perpendiculaires aux trois axes principaux du corps : et divisant chacun d'eux par le moment d'inertie relatif à son axe, on aura les trois vitesses angulaires respectives avec lesquelles ces trois couples tendraient à faire tourner sur leurs axes. Si donc, à partir du centre, on porte sur ces directions trois lignes pour représenter à la fois les axes et les grandeurs de ces trois rotations, et qu'on achève le parallélépipède, on aura, dans la diagonale, l'axe et la grandeur de la rotation à laquelle

le couple proposé donne naissance au premier instant; ce qui est, comme on le voit, de la plus grande simplicité.

Du mouvement que prend un corps en vertu de forces quelconques données.

Quelles que soient ces forces, on peut toujours les réduire à une seule passant par le centre de gravité du corps, et à un seul couple. Or, l'effet de la force est un pur mouvement de translation suivant la direction même de cette force, et l'effet du couple est d'imprimer au corps une rotation autour d'un certain axe, passant par le centre de gravité, et dont la direction est déterminée par ce qu'on vient de dire tout à l'heure.

Mais on peut avoir une expression bien plus claire de ce qui regarde la direction que prend l'axe instantané par rapport au plan du couple qui lui donne naissance; et c'est ce que l'on va voir dans l'article suivant.

De l'ellipsoïde central des corps.

Si l'on observe que les trois composantes du couple proposé donnent trois rotations qui sont *proportionnelles* à ces couples et *réciproques* aux momens d'inertie autour des trois axes, on reconnaît par la Géométrie, que l'axe de la rotation résultante se dirige suivant le diamètre qui

serait *conjugué* au *plan* du couple dans un ellipsoïde dont les axes seraient de longueurs réciproques aux racines carrées des momens d'inertie du corps autour des mêmes axes.

J'imagine donc qu'autour du centre de gravité du corps, et sur les directions de ses trois *axes principaux*, on construise un ellipsoïde avec des axes dont les carrés soient réciproques aux trois *momens d'inertie* du corps autour des mêmes axes : et j'observe en passant que cet ellipsoïde jouira, dans toute son étendue, de cette propriété remarquable, que le moment d'inertie du corps autour de l'un quelconque de ses diamètres y sera réciproque au carré de la longueur de ce diamètre.

Or, quelles que soient la figure et la constitution d'un corps, il y a toujours dans ce corps un centre de gravité et trois axes principaux aussi nettement déterminés que dans le corps le plus homogène et le plus régulier. On peut donc toujours y concevoir décrit un ellipsoïde tel que je viens de le définir, et qui a ce triple avantage, de mettre à la fois sous nos yeux le centre et les axes principaux du corps; de nous donner tous les momens d'inertie qu'on pourrait avoir à considérer, en montrant chacun d'eux, autour d'un axe ou diamètre quelconque, comme exprimé par une même fonction simple de

la longueur de ce diamètre ; et enfin de nous offrir une expression facile de ce qui regarde la position de l'axe instantané, par rapport à celle du couple d'impulsion. Or, c'est cet ellipsoïde, dont la considération va jeter le plus grand jour sur la théorie de la rotation des corps, que je nommerai désormais *l'ellipsoïde central.*

Expression claire du mouvement que prend un corps en vertu d'un couple quelconque.

Supposons qu'un corps en repos soit frappé par un couple dans un plan quelconque, mené par le centre de gravité, et qu'on peut regarder comme un plan diamétral de l'ellipsoïde central du corps : on vient de voir que l'axe instantané de la rotation à laquelle ce couple donne naissance n'est autre chose que le *diamètre conjugué* au plan de ce couple dans l'ellipsoïde que l'on considère; et il est clair d'ailleurs que la vitesse angulaire sera mesurée par le moment du couple estimé perpendiculairement à ce diamètre, et divisé par le moment d'inertie du corps autour du même diamètre.

Comme un couple peut toujours être transporté dans un plan quelconque parallèle au sien, sans que son effet sur le corps en soit changé, on peut toujours supposer que le

plan du couple d'impulsion, au lieu d'être conduit par le centre, soit mené tangent à la surface de notre ellipsoïde; et alors on peut dire :

Que si un corps est frappé par un couple situé dans un plan quelconque tangent à l'ellipsoïde central de ce corps, le pôle instantané de la rotation, à laquelle ce couple donne naissance, est précisément au point de contact.

Et réciproquement, que *si un corps tourne sur un diamètre quelconque de son ellipsoïde central, le couple actuel qui l'anime est dans le plan tangent au pôle.*

Ce qui nous paraît un des théorèmes les plus simples qu'on puisse offrir en Dynamique sur la théorie si difficile et si obscure de la rotation des corps.

On voit toutes les conséquences claires et faciles qui découlent de cette élégante proposition : mais je ne veux point ici m'y arrêter; il faut que j'avance, et que, par le seul raisonnement, j'arrive de suite à la solution complète du problème qu'on se propose : car il ne s'agit pas seulement de déterminer la rotation du corps au premier instant, mais de voir encore comment cette rotation change d'un instant à l'autre, et de peindre, pour ainsi dire, le mouvement du corps dans toute la suite de son cours.

II.

SOLUTION DU PROBLÈME DE LA ROTATION DES CORPS LIBRES.

Et d'abord, il est clair que cet axe de rotation que l'on nomme *instantané* n'est en effet immobile qu'un instant. Car, de la rotation même autour de cet axe, naissent, pour toutes les molécules égales du corps, des forces centrifuges proportionnelles aux rayons des cercles que ces molécules tendent à décrire, et dirigées suivant ces rayons. Or, l'axe dont il s'agit n'étant point, par hypothèse, un axe principal du corps, ces forces centrifuges ne se font point équilibre entre elles. Transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité, elles donnent bien une résultante qui est nulle; mais leur couple résultant ne l'est point. Il provient donc de la rotation même du corps un couple *accélérateur* dont l'effort à chaque instant imprime à ce corps une rotation infiniment petite, laquelle se compose avec la rotation actuelle qui l'anime, et fait ainsi varier l'axe et la grandeur de cette rotation.

Pour étudier le mouvement du corps, il faut

donc commencer par chercher ce couple accélérateur qui provient des forces centrifuges. Or, il est très facile de *voir directement*, ou de *conclure* du principe général de la *conservation des couples*, que si l'on considère deux lignes, dont l'une représente l'axe et la grandeur du couple d'impulsion, et l'autre l'axe et la grandeur de la rotation instantanée, le couple accélérateur dû aux forces centrifuges est toujours représenté, et pour son plan et pour sa quantité, par la surface du parallélogramme construit sur les deux lignes dont il s'agit: théorème simple et remarquable qui renferme à lui seul toute la théorie de la rotation des corps, et qui, traduit en analyse, donne sur-le-champ les trois équations si élégantes que l'on doit à Euler, mais qu'on ne démontre ordinairement que par de longs circuits d'analyse.

Le couple accélérateur né des forces centrifuges étant donc toujours situé dans le plan conduit par l'axe instantané et l'axe du couple d'impulsion, la droite sur laquelle il tend à faire tourner le corps n'est autre chose que le diamètre conjugué au plan de ces deux axes : et par conséquent, c'est le diamètre qui est à la fois conjugué à l'axe instantané et à sa projection sur le plan du couple. D'où je conclus d'abord que *l'axe sur lequel les forces centrifuges font tourner est toujours situé*

dans le plan même du couple d'impulsion.

Donc si l'on prend deux lignes dont l'une représente cette rotation infiniment petite, l'autre la rotation actuelle, et qu'on achève le parallélogramme, afin d'avoir, dans la diagonale, la ligne qui représente la rotation au bout d'un instant, il est clair que l'extrémité de cette diagonale reste toujours à la même hauteur au-dessus du plan du couple. D'où l'on tire sur-le-champ ces deux corollaires : le premier, c'est que *dans tout le cours du mouvement, la vitesse angulaire est proportionnelle à la longueur même du rayon qui va du centre au pôle instantané sur la surface de l'ellipsoïde central*; le second, c'est que *le plan du couple considéré sans cesse comme tangent au pôle, reste toujours à la même distance du centre de cet ellipsoïde.*

Mais ce centre est immobile dans l'espace absolu, et le plan du couple, toujours parallèle à lui-même : donc *ce plan qui touche sans cesse l'ellipsoïde central au pôle instantané de rotation, est toujours un seul et même plan fixe dans l'espace absolu.*

Donc, le mouvement du corps, ou, ce qui est la même chose, le mouvement de l'ellipsoïde central, est de telle nature que cet ellipsoïde reste en contact avec un même plan fixe dans l'espace absolu ; qu'il tourne à chaque

instant sur le rayon vecteur qui va du centre au point de contact, et qu'il tourne avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur même de ce rayon.

Cet ellipsoïde ne fait donc que rouler, sans glisser, sur le plan fixe que l'on considère: car, comme tout son mouvement consiste à tourner pendant un instant sur la ligne menée du centre au point de contact, l'ellipsoïde amène au bout de cet instant un nouveau point de sa surface en contact avec ce plan; et ce nouveau point, qui devient le pôle de la rotation pour l'instant suivant, reste à son tour immobile pendant cet instant, et ainsi de suite à l'infini; d'où il est manifeste qu'aucun de ces points par lesquels l'ellipsoïde vient se mettre en contact avec le plan fixe, ne peut jamais glisser sur ce même plan.

« Telle est donc l'idée claire et nouvelle
» qu'on peut se former du mouvement si com-
» pliqué et si obscur d'un corps de figure quel-
» conque qui tourne librement, soit autour
» de son centre de gravité, soit autour d'un
» point fixe quelconque, en vertu d'un cou-
» ple dont il a reçu primitivement l'impulsion
» dans tel plan donné qu'on voudra.

» Considérez le centre de gravité du corps,
» ou si le corps n'est pas libre, le point fixe
» qui fait le centre de sa rotation. Autour de

» ce point, et sur les directions des trois axes
» principaux d'inertie qui s'y rapportent, imaginez un ellipsoïde construit avec trois axes
» de longueurs réciproques aux *bras de l'inertie* du corps autour des mêmes axes; et faites
» maintenant abstraction de la figure du corps
» pour n'y plus voir que celle de cet ellipsoïde
» que j'ai nommé l'*ellipsoïde central.*

» Si vous supposez que cet ellipsoïde, dont
» le centre est retenu immobile au même
» point de l'espace, roule sans glisser sur un
» plan fixe avec lequel on l'a mis en contact,
» vous aurez la représentation exacte du mouvement géométrique que suit le corps en
» vertu du couple qui l'a frappé dans le plan
» fixe que l'on considère : et si vous ajoutez
» que la vitesse angulaire avec laquelle il
» tourne à chaque instant sur le rayon mené
» du centre au point de contact, est proportionnelle à la longueur même de ce rayon,
» vous aurez à la fois le mouvement géométrique et dynamique de ce corps : c'est-à-dire, que vous verrez avec clarté, non-seulement la suite continue des lieux que le
» corps doit venir occuper, mais encore la
» proportion des temps qu'il met à les parcourir; ce qui est l'idée complète du mouvement du corps considéré dans le cours
» infini de sa rotation. »

Réflexion générale.

Nous voilà donc conduits par le seul raisonnement à une idée claire que les géomètres n'ont pu tirer des formules de l'analyse. C'est un nouvel exemple qui montre l'avantage de cette méthode simple et naturelle de considérer les choses en elles-mêmes, et sans les perdre de vue dans le cours du raisonnement. Car, si l'on se contente, comme on le fait d'ordinaire, de traduire les problèmes en équations, et qu'on s'en rapporte ensuite aux transformations du calcul pour mettre au jour la solution qu'on a en vue, on trouvera le plus souvent que cette solution est encore plus cachée dans ces symboles analytiques, qu'elle ne l'était dans la nature même de la question proposée. Ce n'est donc point dans le calcul que réside cet art qui nous fait découvrir; mais dans cette considération attentive des choses, où l'esprit cherche avant tout à s'en faire une idée, en essayant, par l'analyse proprement dite, de les décomposer en d'autres plus simples, afin de les revoir ensuite comme si elles étaient formées par la réunion de ces choses simples dont il a une pleine connaissance. Ce n'est pas que les choses soient composées de cette manière, mais c'est notre seule manière de les voir, de nous en faire une idée, et par-

tant de les connaître. Ainsi notre vraie méthode n'est que cet heureux mélange de l'analyse et de la synthèse, où le calcul n'est employé que comme un instrument. Instrument précieux et nécessaire sans doute, parce qu'il assure et facilite notre marche; mais qui n'a par lui-même aucune vertu propre; qui ne dirige point l'esprit, mais que l'esprit doit diriger comme tout autre instrument.

Ce qui a pu faire illusion à quelques esprits sur cette espèce de force qu'ils supposent aux formules de l'analyse, c'est qu'on en retire, avec assez de facilité, des vérités déjà connues et qu'on y a, pour ainsi dire, soi-même introduites; et il semble alors que l'analyse nous donne ce qu'elle ne fait que nous rendre dans un autre langage. Quand un théorème est connu, on n'a qu'à l'exprimer par des équations; si le théorème est vrai, chacune d'elles ne peut manquer d'être exacte, aussi bien que les transformées qu'on en peut déduire: et si l'on arrive ainsi à quelque formule évidente, ou bien établie d'ailleurs, on n'a qu'à prendre cette expression comme un point de départ, à revenir sur ses pas, et le calcul seul paraît avoir conduit comme de lui-même au théorème dont il s'agit. Mais c'est en cela que le lecteur est trompé. Ainsi, pour prendre un exemple dans la question même qui fait l'objet de ce Mémoire, il est bien clair

qu'aujourd'hui rien ne serait plus aisé que de retrouver nos idées dans les expressions analytiques d'Euler ou de Lagrange, et même de les en dégager avec un air de facilité qui ferait croire que ces formules devaient les produire spontanément. Cependant, comme ces idées ont échappé jusqu'ici à tant de géomètres qui ont transformé ces formules de tant de manières, il faut convenir que cette analyse ne les donnait point, puisque, pour les y voir, il aura fallu attendre qu'un autre y parvînt par une voie toute différente.

Nous aurions bien d'autres réflexions à faire, et de plus grands exemples à produire, si nous voulions montrer d'une part, tout ce que l'esprit doit de lumière à cette méthode naturelle, telle que je l'ai définie plus haut et qui constitue notre véritable analyse, et de l'autre, le peu de vérités nouvelles qu'on a su tirer de ces formules analytiques où l'on croit enfermer une question, et quelquefois même une science tout entière. Sans doute la science y est contenue, comme elle le serait dans tout autre principe énoncé en termes généraux ; mais la difficulté reste de l'en faire sortir : et cette difficulté n'en devient-elle pas plus grande ? Et par exemple, ne faut-il pas bien connaître et la Mécanique et l'Analyse, pour tirer de la seule formule générale des vitesses virtuelles, je ne

dis pas quelque nouveau théorème (ce dont je ne vois guère d'exemples), mais seulement les propositions particulières qui nous sont déjà le mieux connues? La traduction n'est-elle pas ici plus difficile que le texte lui-même, je veux dire que la considération immédiate des choses que l'on veut étudier? L'illustre auteur qui a voulu transformer la Mécanique en une question de calcul, a sans doute rempli son objet avec toute la clarté et toute l'élégance qu'on en pouvait attendre. Mais si la véritable analyse brille quelque part dans la *Mécanique analytique*, j'oserai dire que c'est bien moins dans ces calculs que l'auteur range avec tant d'ordre et de symétrie, que dans le rapprochement des méthodes, et dans ces admirables préfaces qu'il a placées à la tête des différens livres de son ouvrage, où il examine et discute les principes fondamentaux de la science, et fait l'histoire instructive du mouvement de l'esprit humain dans cette suite délicate d'idées fines et de solutions ingénieuses qui ont peu à peu formé la Mécanique. C'est par là surtout que ce bel ouvrage pourra servir aux progrès ultérieurs de l'esprit, en lui montrant la route qu'il a suivie, et qui est encore la route où il doit continuer de marcher. Car, encore une fois, gardons-nous de croire qu'une science soit faite quand on l'a réduite à des formules analytiques. Rien

ne nous dispense d'étudier les choses en elles-mêmes, et de nous bien rendre compte des idées qui font l'objet de nos spéculations. N'oublions point que les résultats de nos calculs ont presque toujours besoin d'être vérifiés d'un autre côté, par quelque raisonnement simple, ou par l'expérience. Que si le calcul seul peut quelquefois nous offrir une vérité nouvelle, il ne faut pas croire que sur ce point même l'esprit n'ait plus rien à faire : mais, au contraire, il faut songer que cette vérité étant indépendante des méthodes ou des artifices qui ont pu nous y conduire, il existe certainement quelque démonstration simple qui pourrait la porter à l'évidence : ce qui doit être le grand objet et le dernier résultat de la science mathématique.

Qu'on me pardonne ces réflexions que je fais, j'ose le dire, dans l'unique intérêt de la science. Je connais le caractère propre et distinctif de l'analyse algébrique, et je pourrais même dire avec précision en quoi cet art a pu perfectionner la logique ordinaire du discours : je sais tout ce que les bons esprits doivent au calcul; mais je tâche d'éclairer ceux qui se trompent sur la nature de cet instrument, et en même temps, de prévenir l'abus que d'autres en peuvent faire en profitant de cette illusion même. Car, sitôt qu'un auteur ingénieux

a su parvenir à quelque vérité nouvelle, n'est-il pas à craindre que le calculateur le plus stérile ne s'empresse d'aller vite la rechercher dans ses formules, de la découvrir une seconde fois, et à sa manière, qu'il dit être la bonne et la véritable ; de telle sorte qu'on ne s'en croie plus redevable qu'à son analyse, et que l'auteur lui-même, quelquefois peu exercé, ou même étranger à ce langage et à ces symboles sous lesquels on lui dérobe ses idées, ose à peine réclamer ce qui lui appartient, et se retire presque confus, comme s'il avait mal inventé ce qu'il a si bien découvert ? Singulier artifice, que je n'ai pas besoin de caractériser davantage, mais qu'il est bon de signaler comme un des plus nuisibles aux progrès des sciences, parce qu'il est sans contredit un des plus propres à décourager les inventeurs !

Mais je n'étendrai pas plus loin ces réflexions : et si le peu qu'on a dit est assez sensible par les exemples qui précèdent, on le verra se confirmer encore par ceux qui pourront suivre.

III.

DÉVELOPPEMENT DE LA SOLUTION.

Des deux courbes décrites par le pôle instantané de rotation.

Dans cette image si claire que nous avons donnée de la rotation des corps, on voit sur-le-champ toutes les circonstances et toutes les variétés que ce mouvement peut offrir, et l'on est conduit, comme par la main, aux opérations et aux calculs qu'il faut faire, si l'on veut en mesurer toutes les différentes affections.

Et d'abord, cette suite de points par lesquels l'ellipsoïde central du corps vient se mettre en contact avec le plan fixe du couple d'impulsion, étant considérée sur la surface de l'ellipsoïde, y marque la route du pôle instantané dans l'intérieur du corps ; et ces mêmes points étant considérés sur le plan fixe, y marquent sa route dans l'espace absolu. On peut donc détermi-

ner sur-le-champ ces deux lignes courbes, et les considérer comme les bases de deux surfaces coniques de même sommet, dont l'une, mobile avec le corps, roulant sur l'autre qui est fixe dans l'espace absolu, donnerait à ce corps le mouvement précis qui l'anime.

Pour trouver la première courbe, il n'y a donc qu'à chercher la suite des points où l'ellipsoïde serait touché par un plan mobile qui resterait toujours à la même distance du centre de cet ellipsoïde; ou, ce qui est la même chose, qui toucherait à la fois cet ellipsoïde et une sphère concentrique d'un rayon égal à la distance donnée.

Tandis que ce plan trace sur l'ellipsoïde la route du pôle instantané, on pourrait remarquer qu'il trace sur la sphère la route que le pôle du couple, qui est fixe dans l'espace, paraît décrire dans l'intérieur du mobile; c'est une autre courbe du même genre et que nous aurons aussi l'occasion de considérer.

Mais, pour ne parler ici que de la première, on voit donc que cette courbe est un orbe *fermé*, à *double courbure*, qui a comme l'ellipse, *quatre sommets principaux* où elle est divisée en quatre parties égales et symétriques : espèce de *roue* elliptique, dont l'axe ou l'*essieu* est toujours, ou le *rayon majeur*, ou le *rayon mineur* de l'ellipsoïde central, selon que le

rayon de la sphère est donné plus grand ou plus petit que le rayon moyen de cet ellipsoïde. Cet orbe à double courbure se projette en une *ellipse entière* sur le plan perpendiculaire à celui des deux axes qui lui sert d'essieu; en un *arc d'ellipse*, sur l'autre plan; et toujours en un *arc d'hyperbole*, sur le plan perpendiculaire à l'*axe moyen*.

Les quatre sommets de cet orbe sont les points où le rayon vecteur, et par conséquent la vitesse angulaire de rotation, atteint ses valeurs *maxima* ou *minima;* et l'on peut remarquer que le *maximum* a toujours lieu quand le pôle instantané passe aux deux sommets qui tombent dans le plan principal *moyen* de l'ellipsoïde; et le *minimum*, quand il passe aux deux autres sommets de la courbe.

Le seconde courbe, pouvant être considérée comme tracée par celle-ci qu'on ferait rouler, autour du centre, sur le plan fixe du couple, est donc une *courbe plane*, qui circule autour de la projection de ce centre, en formant des ondes égales et régulières, correspondantes aux arcs égaux et symétriques de l'orbite roulante qui la produit : c'est une espèce de courbe circulaire, mais d'un rayon variable et périodique, et qui serpente ainsi à l'infini entre deux cercles concentriques dont elle va toucher alternativement l'une et l'autre circonférence.

Si l'angle au centre, qui répond à deux sommets consécutifs de ces ondes équidistantes, est commensurable avec quatre angles droits, la courbe se ferme après un certain nombre de révolutions; et le pôle instantané qui la décrit revient au même lieu et dans le corps et dans l'espace tout-à-la-fois. Mais dans le cas contraire, la courbe ne se ferme point, et le pôle, qui revient toujours périodiquement au même lieu dans le corps, ne peut jamais revenir en même temps au même lieu dans l'espace.

Telles sont les deux courbes décrites par le pôle instantané, l'une dans l'intérieur du corps, et l'autre dans l'espace absolu. Et quoique ces courbes soient de formes si différentes, comme c'est un seul et même point qui décrit à la fois l'une et l'autre, leurs équations prises entre le rayon vecteur et la longueur de l'arc décrit, sont exactement une seule et même équation.

Le *cône roulant*, à la surface duquel la première courbe sert de base, est simplement *un cône droit du second degré;* mais le *cône fixe* sur lequel il roule est un *cône transcendant* dont la surface ondule à l'infini autour de l'axe fixe du couple : c'est aussi une espèce de cône droit et circulaire, mais dont la surface serait, pour ainsi dire, *cannelée* suivant le contour régulièrement ondulé de la courbe qui lui sert de base.

Des noms qu'on pourrait donner à ces deux courbes.

On sait qu'un corps pesant, projeté comme on voudra dans l'espace, tourne sur son centre de gravité, exactement de la même manière que s'il était libre de toute pesanteur. On voit donc que les courbes remarquables dont il s'agit, sont deux courbes que la nature nous offre à chaque instant dans le mouvement des projectiles, et qu'ainsi chacune d'elles mériterait d'avoir un nom, aussi bien que la courbe qui est décrite par le centre de gravité, et qu'on appelle la *parabole*.

Je proposerais donc de donner à ces deux courbes le nom de *Poloïdes*, en appelant la première, qui est décrite dans l'intérieur du corps, la poloïde *relative ;* et la seconde qui est décrite dans l'espace, la poloïde *absolue :* ou, si l'on aimait mieux les distinguer par leur forme particulière, on donnerait à la première courbe, qui est un orbe elliptique et fermé, le simple nom de *poloïde;* et à l'autre qui est plane et ondulée, celui de *serpoloïde*, afin de rappeler, avec l'idée du pôle qui la décrit, la propriété qu'elle a de *serpenter* en circulant autour d'un même centre fixe.

Variétés que ces deux courbes peuvent offrir dans certains cas particuliers.

Ces deux courbes ne dépendent, comme on voit, que de quatre données, savoir : les trois demi-axes ou *rayons principaux* de l'ellipsoïde central, lesquels sont toujours donnés par la nature du corps; et ensuite la *hauteur* du centre au-dessus du plan tangent du couple, laquelle est donnée par la direction du couple d'impulsion.

Cas singulier où la poloïde devient une ellipse, et la serpoloïde une spirale.

Dans le cas singulier où cette hauteur serait donnée précisément égale à la longueur du *rayon moyen* de l'ellipsoïde, la *poloïde* devient une *ellipse* dont le plan passe par ce rayon moyen ; et alors la serpoloïde devient une *spirale*, laquelle, considérée dans toute son étendue, est en quelque sorte une spirale *double;* je veux dire qu'elle a un sommet, à gauche et à droite duquel elle jete deux branches égales qui vont en sens contraires tourner en spirales autour d'un même centre fixe : centre dont elles s'approchent sans cesse, et de plus près que tout

ce qu'on voudra, comme d'un *point asymptotique* qu'elles ne peuvent jamais atteindre Dans ce cas singulier du mouvement des corps, le pôle instantané de la rotation est donc un point toujours nouveau et dans le corps et dans l'espace absolu, quoique la longueur de la spirale décrite soit finie et tout au plus égale à la demi-circonférence de l'ellipse roulante qui la produit.

Cas particuliers où elles se réduisent à un point.

Si la distance du centre au plan tangent est donnée égale à l'un des deux *rayons extrêmes* de l'ellipsoïde; comme cela ne peut arriver qu'en un seul point de la surface, la poloïde et la serpoloïde se réduisent toutes deux à un seul et même point, et le pôle instantané reste immobile et dans le corps et dans l'espace pendant tout le cours du mouvement; et la même chose aurait encore lieu dans un cas unique (appartenant au cas singulier qui précède), celui où le plan du couple serait donné tangent au point précis qui fait le pôle *moyen* de l'ellipsoïde central du corps.

Cas particulier relatif à l'espèce du corps, et où les deux courbes deviennent des cercles.

Enfin, si le corps est de l'espèce de ceux qui ont deux de leurs momens principaux d'inertie égaux entre eux, auquel cas l'ellipsoïde central est de *révolution*, la poloïde devient un *cercle* autour de l'axe de ce sphéroïde, et la serpoloïde est un autre *cercle* autour de l'axe fixe du couple. Dans tous les corps de cette espèce, le mouvement est celui d'un cône droit à base circulaire qui roule uniformément sur un autre cône fixe également droit et circulaire. C'est un des cas les plus simples du mouvement de rotation, mais où il faut pourtant remarquer que, si les deux circonférences des cercles dont il s'agit ne sont point commensurables entre elles, ce qui arrive le plus généralement, le pôle instantané ne peut jamais revenir en un point qui tombe à la fois au même lieu dans le corps et au même lieu dans l'espace absolu.

Il est inutile de parler du cas le plus simple de tous, de celui où l'ellipsoïde central du corps est une sphère parfaite : car, de quelque manière que le couple soit appliqué, l'axe de la rotation et l'axe du couple se confondent, et le pôle instantané reste immobile dans le corps et dans l'espace absolu.

Vitesses du pôle, soit pour décrire ces deux courbes, soit pour s'approcher ou s'éloigner du centre, soit pour circuler autour de l'axe fixe du couple, etc.

Après avoir examiné la nature de ces deux courbes décrites par le pôle, et dont l'équation différentielle est la même entre l'arc et le rayon vecteur émané du centre de l'ellipsoïde, on peut considérer la vitesse avec laquelle ce pôle instantané décrit à la fois l'une et l'autre; la vitesse qu'il a pour s'éloigner ou se rapprocher du centre, ce qui est la *fluxion* du rayon vecteur, et par conséquent de la *vitesse angulaire* de rotation; on peut chercher le mouvement angulaire du pôle autour de l'axe fixe du couple d'impulsion. Il est donc facile de déterminer les points remarquables où ces différentes vitesses passent à leur *maximum* ou *minimum;* ce qui arrive aux sommets alternatifs des ondes de la serpoloïde. Mais on pourra faire une remarque curieuse sur la vitesse du pôle le long de cette courbe; c'est que, dans certains cas, elle peut être un *minimum* au sommet *supérieur* de l'onde, et encore un *minimum* au sommet *inférieur;* et par conséquent elle a un *maximum* dans un troisième point intermédiaire, ce qui n'a pas lieu pour les autres vitesses, qui n'ont

de *maximum* ou de *minimum* qu'aux sommets de la courbe décrite par le pôle.

On pourra simplifier ensuite l'équation de la serpoloïde, en la rapportant à un rayon vecteur émané de son propre centre pris dans le plan même de la courbe, et à l'angle que ce rayon décrit autour du même centre, etc., etc. Et toutes ces expressions n'auront aucune difficulté.

Détermination du lieu du corps au bout d'un temps donné.

Enfin, si l'on veut trouver les formules par lesquelles on puisse calculer le lieu du corps au bout d'un temps donné, on commencera par déterminer la vitesse angulaire de rotation en fonction du temps, ce qui se fera par une première intégration, et donnera le lieu du pôle instantané à la surface de l'ellipsoïde central. Ensuite on intégrera l'équation précédente de la serpoloïde, ce qui donnera le lieu du pôle sur le plan fixe du couple. Et par ces deux *quadratures*, qui se rapportent naturellement aux *transcendantes elliptiques*, on pourra dire que le problème proposé est entièrement résolu; je veux dire qu'on sera en état *d'assigner actuellement le lieu de l'espace où doit se trouver le corps au bout d'un temps quelconque donné*. En effet, on n'aura qu'à supposer l'el-

lipsoïde mis en contact avec le plan fixe, de manière qu'il touche par le point qu'on vient de déterminer à sa surface, et au point qu'on vient de déterminer sur le plan dont il s'agit; et par cette opération, l'ellipsoïde central, et par conséquent le corps lui-même, se trouvera posé dans le lieu précis de l'espace où il arrive par son mouvement naturel au bout du temps donné.

On peut varier ces déterminations de plusieurs manières, en prenant d'autres inconnues relatives à la position du corps; mais quelles que soient les coordonnées qu'on emploie, l'expression de ces quantités en fonction du temps, demandera toujours *deux intégrations* qui dépendent essentiellement des *transcendantes elliptiques*.

Dans le *cas singulier* où la hauteur du centre au-dessus du plan fixe, est égale au rayon *moyen* de l'ellipsoïde, et où par conséquent la poloïde devient une simple *ellipse*, et la serpoloïde une *spirale*, la difficulté s'abaisse; tout se réduit aux règles ordinaires, et ne dépend que des *exponentielles* ou des *logarithmes*.

Enfin, pour tous les corps où l'ellipsoïde central est de *révolution*, et où par conséquent tout devient uniforme et circulaire, on n'a besoin d'aucune intégration pour déterminer le lieu du corps au bout d'un temps donné.

Propriétés des trois axes principaux du corps, relatives à la stabilité de la rotation.

Quand le plan du couple d'impulsion est tel que le pôle instantané tombe sur l'un des pôles principaux de l'ellipsoïde central, il y reste toujours; de manière que l'axe instantané, l'axe du corps et celui du couple ne cessent de se confondre en une seule et même droite immobile dans tout le cours du mouvement. Les axes principaux du corps sont donc tous trois des axes permanens de rotation. Mais il y a entre eux, comme on le sait, une différence remarquable sous le point de vue de la stabilité que chacun de ces axes peut offrir dans la rotation du corps.

Si le pôle instantané tombe actuellement au pôle *majeur*, ou au pôle *mineur* de l'ellipsoïde, et que par l'impulsion de quelque petit couple étranger, il vienne à en être écarté à une petite distance, il ne s'en éloignera guère davantage, parce qu'il décrira sa *poloïde* autour de ce pôle même du corps d'où il a été écarté. Mais il n'en est pas de même quand le pôle instantané tombe au pôle *moyen* de l'ellipsoïde; car, pour peu que l'on dérange, il s'en éloignera davantage, s'en allant alors décrire sa poloïde, soit autour du pôle majeur, soit autour du pôle mi-

neur, selon que ce dérangement accidentel du pôle instantané aura fait augmenter ou diminuer la distance du plan tangent du couple au centre de l'ellipsoïde. Et si ce dérangement est tel que cette distance n'ait pas varié, ce qui arrive à la surface le long de deux ellipses singulières qui se croisent au pôle *moyen*, le pôle instantané ira décrire l'ellipse singulière sur laquelle on l'aura porté, ou plutôt la moitié de cette ellipse, pour aller retomber sur le pôle moyen *opposé* de l'ellipsoïde, ce qui est le plus grand dérangement qui puisse arriver au corps : ou bien, si le pôle instantané était porté sur l'autre moitié de la même ellipse, il reviendrait aussitôt au pôle moyen d'où il est parti ; ce qui est le plus petit dérangement possible de la rotation du corps. Il y a donc ici un cas unique où l'axe instantané de rotation étant écarté de *l'axe moyen*, où il était d'abord, non-seulement ne s'en éloigne pas davantage, mais même s'en rapproche aussitôt, et de plus près que tout ce qu'on voudra. Mais, dans tous les autres cas, il va décrire un cône elliptique, soit autour de l'axe majeur, soit autour de l'axe mineur, ou tracer le plan de l'une ou de l'autre des deux ellipses singulières dont j'ai parlé : et l'on peut dire que la rotation du corps autour de son *axe moyen* n'a point de stabilité.

La rotation n'est donc *stable* qu'autour de

l'axe *du plus grand*, ou du *plus petit* moment d'inertie du corps : mais il n'en faut pas conclure qu'elle soit également stable pour ces deux axes; car, si l'un d'eux diffère peu de l'axe moyen, il n'aura guère plus de stabilité que l'axe moyen lui-même, comme on va le voir tout à l'heure.

De ce qui fait la mesure de la stabilité pour chacun des deux axes extrêmes de l'ellipsoïde central.

Pour se faire une idée nette de cette stabilité, et de ce qui en fait en quelque sorte la mesure pour chacun de ces deux axes, imaginez la surface de l'ellipsoïde comme coupée en quatre parties ou fuseaux elliptiques par les deux ellipses que j'ai considérées et dont les plans se coupent suivant l'axe moyen. Le *pôle moyen* est donc à l'intersection de ces deux ellipses; le pôle majeur est au centre de l'un des deux fuseaux, et le pôle mineur au centre du fuseau supplémentaire.

Or, en premier lieu, si le pôle instantané de la rotation tombe au *pôle moyen* de l'ellipsoïde, il est clair que, pour peu qu'on le déplace, il va tomber dans l'un ou l'autre des deux fuseaux dont il s'agit, et décrire son orbe ou sa poloïde

autour de l'un ou de l'autre pôle principal de l'ellipsoïde : ou bien, si on le déplace sur une des deux ellipses mêmes, il va décrire la moitié de cette ellipse pour retomber sur le pôle moyen opposé ; ou, s'il est porté sur l'autre moitié de la même ellipse, il revient aussitôt au pôle moyen même d'où on l'a écarté. D'où il résulte, comme on l'a dit ci-dessus, que, hors de ce cas unique de déplacement, l'axe moyen du corps n'a aucune stabilité.

Actuellement, si le pôle instantané tombe sur le pôle *majeur* de l'ellipsoïde, il peut être déplacé, comme on voudra, dans toute l'étendue du fuseau environnant, sans cesser de décrire sa poloïde autour du même pôle majeur: et si c'est en cela qu'on fait consister la stabilité de l'axe majeur, on peut dire que la grandeur de ce fuseau en est en quelque sorte la mesure. Et l'on voit de même que l'étendue du fuseau supplémentaire est la mesure de la stabilité de la rotation autour de l'axe *mineur*. Or, si l'un de ces deux axes diffère peu de l'axe moyen, le fuseau qui lui répond est très petit, et le fuseau supplémentaire est très grand. L'axe peu différent de l'axe moyen a donc très peu de stabilité, et l'autre axe en a beaucoup. Il n'est donc point exact de dire, comme on le fait d'ordinaire, que si l'axe instantané est un peu écarté de l'axe principal qui répond au plus

petit, ou au plus grand moment d'inertie du corps, il s'en éloigne très peu et ne fait que de petites oscillations pendant toute la durée du mouvement : car si le moment d'inertie relatif à cet axe diffère peu du moment moyen, le pôle instantané, par un petit dérangement, peut sortir du petit fuseau où il est actuellement, pour tomber dans le fuseau voisin et y aller décrire sa poloïde autour de l'autre axe; ou même, s'il n'est déplacé que dans l'intérieur du petit fuseau qui lui répond, il peut y décrire une poloïde étroite et fort allongée, et par conséquent faire de très grandes oscillations autour du pôle principal d'où on l'a écarté.

Dans les corps où l'un des momens extrêmes d'inertie diffère peu du moment moyen, et par conséquent où l'ellipsoïde central du corps est presque de révolution autour de l'un de ses axes, la stabilité de la rotation n'est donc vraiment assurée que pour cet axe. C'est le cas de la Terre, dont la rotation est très stable autour de son axe actuel, et le serait très peu autour du troisième axe qui, comme on le sait, diffère très peu de l'axe moyen.

Mouvemens des axes principaux du corps dans l'espace absolu.

Nous avons considéré le mouvement du pôle instantané de rotation, et dans le corps et

dans l'espace : mais on pourrait demander quels sont les mouvemens des pôles mêmes de l'ellipsoïde central ; leurs vitesses pour circuler autour de l'axe fixe du couple d'impulsion, pour s'abaisser ou se relever sur le plan perpendiculaire à cet axe, ce qui donne leurs mouvemens de *précession* et de *nutation*: on peut examiner la nature et les propriétés des trois courbes, ou *serpoloïdes*, que les projections de ces trois pôles principaux tracent en même temps sur le plan fixe, etc., etc. : et l'on trouvera de la manière la plus facile beaucoup de propriétés curieuses sur le mouvement des corps.

Et, par exemple, *Je suppose qu'on prenne sur les trois axes principaux du corps, et à partir du centre, trois lignes de même longueur; si, pendant le mouvement du corps, on regarde les trois secteurs que leurs projections décrivent sur le plan du couple, on trouvera que la somme de ces trois aires variables est proportionnelle au temps.*

Que si, au lieu de prendre, sur les axes principaux, trois lignes égales, on prend trois lignes proportionnelles aux racines carrées des momens d'inertie, ou à ce que je nomme les BRAS DE L'INERTIE DU CORPS *autour des mêmes axes, on trouvera que la somme des aires tracées par les projections de ces lignes*

inégales est aussi proportionnelle au temps.

Théorèmes simples et en quelque sorte géométriques, qu'il faut distinguer du théorème dynamique sur les aires tracées par tous les rayons vecteurs menés aux molécules du corps, quoiqu'il soit facile de rapprocher ces expressions qui viennent au fond du même principe.

On trouvera des théorèmes analogues relatifs aux mouvemens de *nutation* des trois axes principaux du corps, vers le plan fixe du couple d'impulsion. Et en effet, *si l'on considère les trois pôles principaux de l'ellipsoïde central, on verra que la somme des carrés de leurs distances à l'axe du couple est constante :*

Et que, la somme de ces carrés multipliés respectivement par les momens d'inertie du corps, est aussi constante dans tout le cours du mouvement.

Enfin, si l'on considère les courbes décrites par les projections de ces pôles sur le même plan fixe, on verra que ces courbes sont du même genre que la serpoloïde décrite par le pôle instantané de rotation.

Dans le cas général, celui des deux pôles, *majeur* ou *mineur,* qui fait le centre de la poloïde, décrit une courbe qui forme, comme la serpoloïde, des ondes égales et régulières autour du même centre ; les sommets supérieurs de l'une répondent aux sommets supérieurs de

l'autre, et les inférieurs aux inférieurs. Pendant ce temps les deux autres pôles décrivent aussi des courbes régulièrement ondulées: mais quand l'un passe aux sommets supérieurs de sa courbe, l'autre passe aux sommets inférieurs de la sienne; et cela, à un angle droit de distance l'un de l'autre.

Dans le *cas singulier* où la poloïde est une *ellipse* et la serpoloïde une *spirale*, *le pôle moyen* du corps décrit aussi une spirale qui va sans cesse en se rapprochant du centre, et de plus près que tout ce qu'on voudra, sans pouvoir jamais l'atteindre : les deux autres pôles décrivent aussi des spirales, mais en quelque sorte d'une autre espèce; car chacune de ces spirales, au lieu de s'approcher du centre, s'en éloigne depuis une certaine distance *minimum* jusqu'à une distance *maximum* qu'elle ne peut jamais atteindre; de sorte qu'elle va sans cesse en s'épanouissant vers une circonférence de cercle qui en est comme l'asymptote.

On peut faire encore une remarque curieuse sur ce cas singulier du mouvement des corps. C'est qu'il y a dans le plan moyen de l'ellipsoïde central un certain diamètre, qui a cette propriété remarquable de rester toujours perpendiculaire à l'axe fixe du couple d'impulsion, de décrire ainsi le plan même de ce couple, et de le décrire d'un mouvement uniforme. De sorte

que *tout le mouvement du corps consiste à tourner sur ce diamètre singulier avec une vitesse variable, tandis que ce diamètre décrit uniformément un cercle dans l'espace.*

Quand l'ellipsoïde central est de révolution, le pôle de la figure décrit un cercle, comme le pôle instantané. Dans ce cas, il n'y a, à proprement parler, d'autre pôle que celui qui fait l'extrémité de l'axe du sphéroïde : mais si l'on voulait en marquer arbitrairement deux autres sur l'équateur, à un angle droit de distance, et considérer les deux courbes que leurs projections décrivent, on aurait deux courbes parfaitement égales, mais non point circulaires : ce seraient deux serpoloïdes égales autour du même centre, et dont les sommets de noms différens seraient toujours à un angle droit de distance l'un de l'autre.

Nous aurions encore à présenter de nouvelles propriétés et de nouvelles images de la rotation des corps. Et par exemple, il est aisé de voir que ce *mouvement est de telle nature que l'ellipsoïde central se trouve coupé sans cesse par le plan fixe du couple d'impulsion suivant une ellipse dont la forme varie, mais dont la surface demeure constante dans tout le cours du mouvement.*

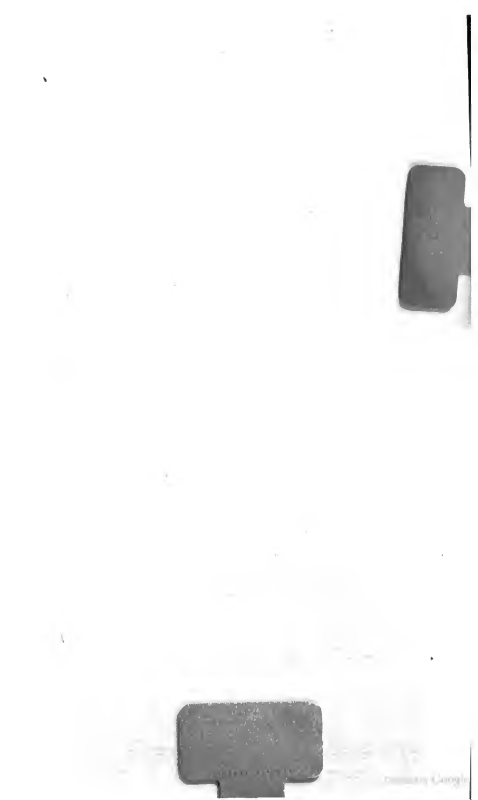
De sorte que, si l'on se représentait l'ellipsoïde central du corps comme plongé dans un fluide sans résistance, dont ce plan fixe serait

le niveau, on pourrait dire que, pendant le mouvement du corps, la section à fleur d'eau reste toujours de même grandeur.

Et de là on peut passer à une nouvelle image du mouvement du corps, et *le représenter par celui d'un cône elliptique qui roule sur le plan même du couple avec une vitesse variable, et qui glisse sur ce plan avec une vitesse uniforme*; etc., etc. Mais toutes ces propriétés seront développées dans le Mémoire.

On voit combien ces images éclaircissent et rectifient les idées, même dans les points les plus élémentaires de la théorie de la rotation des corps. Ceux qui cultivent la géométrie des surfaces du second ordre, en tireront sans peine une foule de propriétés curieuses sur ce mouvement; car chaque proposition de Géométrie pourra leur donner un théorème correspondant en Dynamique. Mais le grand avantage de nos principes est d'offrir des démonstrations faciles de ces mouvemens de *précession* et de *nutation* des équateurs des corps célestes, du *mouvement des nœuds* de leurs orbites, etc.; de simplifier ainsi, et quelquefois de rectifier ces théories difficiles, comme on en a déjà vu un exemple dans la détermination de ce plan *unique* et *invariable* des aires que j'ai nommé l'*équateur* du système du Monde.

FIN.




BIBLIOTECA